学校编号： 10384　　分类号：＿＿＿＿ 密级：＿＿＿＿
学　　号： 200323014　　UDC：＿＿＿＿＿＿＿＿

厦　门　大　学

硕　士　学　位　论　文

多维拟线性退化抛物方程的 Dirichlet 问题

The Dirichlet Problem for A Quasilinear Degenerate Parabolic Equation in Higher Dimension

曲　程　远

指导教师姓名：　赵俊宁　教授

专 业 名 称：　基 础 数 学

论文提交日期：　2006 年 5 月

论文答辩日期：　2006 年　 月

学位授予日期：　2006 年　 月

答辩委员会主席：＿＿＿＿

评　　阅　　人：＿＿＿＿

2006 年 5 月

The Dirichlet Problem for A Quasilinear Degenerate Parabolic Equation in Higher Dimension

By

Qu Chengyuan

Supervisor: Professor Zhao Junning

Speciality: Partial differential equations

Institution: College of Mathematics Science

Xiamen University

Xiamen, P. R. China

May , 2006

学　位　论　文

多维拟线性退化抛物方程的 Dirichlet 问题

曲　程　远

厦　门　大　学

二 0 0 六 年 五 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（）

(请在以上相应括号内打“√”)

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

目录

Contents

摘　要

本文考虑了一类多维拟线性退化抛物方程的 Dirichlet 问题的可解性. 我们利用压缩半群方法证明了弱解的存在性.

关键词: 拟线性退化抛物方程; 压缩半群; Dirichlet 问题.

Abstract

This paper is devoted to the study of the Dirichlet problem of quasilinear degenerate parabolic equations in higher dimension. By using the contraction semigroup method, the existence of the weak solution is proved.

Keywords: Quasilinear degenerate parabolic equations; Contraction semigroup; Dirichlet problem.

第一节 引言

本文利用压缩半群的方法研究如下形式的拟线性退化抛物方程的 Dirichlet 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(|\nabla(|u|^{\alpha-2}u)|^{p-2}\nabla(|u|^{\alpha-2}u)), \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{1}$$

$$u(x,t)=0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \qquad x\in\Omega, \tag{3}$$

这里 $\alpha\geq 2, p\geq 2, \Omega\subset R^N$.

下列方程是 (1) 的特例. 非 Newton 渗流方程，又称发展的 p-Laplace 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \tag{4}$$

非 Newton 多方渗流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(|\nabla u^m|^{p-2}\nabla u^m), \tag{5}$$

其中 $m>0, p>1$. 这类方程在过去的三十多年中已成为广泛的研究对象. 下面简单的介绍它们的物理来源.

首先考虑单相渗流问题. 假设有一种可压流体在均匀、各向同性的刚性多孔介质中的流动. 由质量守恒定律

$$\theta\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\overrightarrow{V}) = 0, \tag{6}$$

其中 θ 为介质的孔隙率 (此时是常数),ρ 为流体的密度， $\overrightarrow{V}$ 为流体的渗流速度. 当我们考虑非 Newton 流体 (例如拟塑性流体) 时，需要计及流量的大小、分子与离子效应等诸多因素的影响，线性的 Darcy 定律不再成立，代替它的是下列非线性关系：

$$\rho\overrightarrow{V} = -\lambda|\nabla P|^{\alpha-1}\nabla P, \tag{7}$$

其中 $\rho\overrightarrow{V}$ 和 P 分别表示流体的动量密度和压力， $\lambda > 0$ 和 $\alpha > 0$ 是某物理常数.

如果所考虑的是多方气体，则压力和密度满足下列状态方程

$$P = c\rho^{\gamma},$$

其中 c 和 γ 都是正常数．于是由 (6) 和 (7) 得

$$\theta\frac{\partial\rho}{\partial t} = c^{\alpha}\lambda div(|\nabla\rho^{\gamma}|^{\alpha-1}\nabla\rho^{\gamma}),$$

改换变量和记号，它就化成 (5)．如果不限于考虑非负解，取 $m = \alpha - 1$, 则方程 (5) 改写为更一般的方程 (1).

对于 p-Laplace 方程 (4) 的研究，在三十年前就已经开始（见 [1]-[3]), 近年来，随着对 Newton 渗流方程研究的深入，这类方程的研究也得到迅速发展．关于解的存在唯一性、解的正则性、解得初始迹问题以及解的分界面的正则性等理论已日趋完善 (见 [4]-[14])．对于非 Newton 多方渗流方程 (5) 的研究也平行地被研究（见 [15]-[17]).

本文的目的是得到更一般形式的方程 (1) 的弱解存在性，在证明中应用了文献 [19] 中的压缩半群方法．下面给出方程弱解的定义．我们假定 $u_0 \in L^1(\Omega)\cap L^{\infty}(\Omega), m \geq 2, p \geq 2$.

定义 1.1 称 $u \in L^{\infty}(0,T;L^1(\Omega))$ 为 Dirichlet 问题 $(1),(2),(3)$ 的弱解，如果 $|u|^{\alpha-2}u \in L^{\infty}(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, 且对任意的 $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega\times(0,T))$ 和 $h \in C_0^{\infty}(\Omega)$, 有

$$\int\int_{\Omega\times(0,T)}(-u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + |\nabla(|u|^{\alpha-2}u)|^{p-2}\nabla(|u|^{\alpha-2}u)\cdot\nabla\varphi)dxdt = 0,$$

$$ess\lim_{t\to 0}\int_{\Omega}u(x,t)h(x)dx = \int_{\Omega}u_0(x)h(x)dx.$$

第二节 预备知识

本节我们介绍一下 Banach 空间上的压缩半群的定义和指数公式, 详细的理论与证明可参看文献 [18].

设 X 是一个实的 Banach 空间, 其对偶空间记为 X^* ,$<\cdot,\cdot>$ 表示对偶积, X 和 X^* 上的范数分别记为 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_*$. 对任意的 $x\in X$, 令

$$F(x)=\{x^*\in X^*;<x,x^*>=\|x\|^2=\|x^*\|_*^2\}$$

由 Hahn-Banach 定理可知 $F(x)\neq\varnothing$.

定义 2.1[19](耗散集) 设 $A\subset X\times X$. 如果对任意的 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A$ 都存在 $f\in F(x_1-x_2)$, 使得

$$\langle y_1-y_2,f\rangle\leq 0,$$

则称 A 为耗散的.

命题 2.1[19] 设 $A\subset X\times X$, 则称 A 为耗散的, 当且仅当对任意的 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A$, 都有

$$\|x_1-x_2\|\leq\|(x_1-x_2)-\lambda(y_1-y_2)\|,\quad\forall\lambda>0.$$

命题 2.2[18] 设 A 为耗散的, 如果 A 是可闭的, 则 A 的闭包算子 $\overline{A}$ 也是耗散的.

定义 2.2[19](压缩半群) 设 C 是 X 的一个闭子集, 如果映射 $S:[0,+\infty)\times C\to C$ 满足

(1) $S(t+s)x=S(t)S(s)x,\forall x\in C,t,s\geq 0;$

(2) $s(0)x=x,\forall x\in C;$

(3) 对任意的 $x\in C,S(t)x$ 在 $[0,+\infty)$ 上是连续的;

(4) $\|S(t)x-S(t)y\|\leq\|x-y\|,\forall t>0,x,y\in C.$

则称 S 是 C 上的压缩半群.

命题 2.3[19] (**指数公式**) 设 X 是一个实的 Banach 空间， $A \subset X \times X$ 是耗散的，且对充分小的 $\lambda > 0$, 有

$$\overline{D(A)} \subset R(I - \lambda A).$$

则对任意的 $x \in \overline{D(A)}$, 极限

$$S(t)x = \lim_{\lambda \to 0^+} (I - \lambda A)^{-[t/\lambda]-1} x, \forall t \geq 0$$

存在，且上述极限在 $[0, +\infty)$ 上关于 t 是局部一致的，其中 $[\cdot]$ 是取整数的函数，即

$$[t] = k, \text{当 } k \leq t \leq k+1 \text{ 时},$$

这里 k 是整数．此外， S(t) 是 $\overline{D(A)}$ 上的压缩半群.

第三节　压缩半群的构造

记 $D(A_0)=\{u\in L^1(\Omega);|u|^{\alpha-2}u\in W^{1,p}(\Omega),div(|\nabla(|u|^{\alpha-2}u)|^{p-2}\nabla(|u|^{\alpha-2}u))\in L^1(\Omega)\}$. 由

$$A_0u=div(|\nabla(|u|^{\alpha-2}u)|^{p-2}\nabla(|u|^{\alpha-2}u))$$

定义算子

$$A_0:D(A_0)\longrightarrow L^1(\Omega).$$

算子 A_0 的闭包记为 A.

命题 3.1 算子 A_0 是耗散的，算子 A 也是耗散的.

证明 设 $u_1,u_2\in D(A_0),v_1=A_0u_1,v_2=A_0u_2$. 为证明算子 A_0 是耗散的，根据命题 2.1, 只须证明

$$J(u_1,u_2)=\int_\Omega sgn(u_1-u_2)(v_1-v_2)dx\le 0. \tag{8}$$

这是因为，假如这一不等式得到了证明，则对任意的 $\lambda>0$, 有

$$\begin{aligned}\|u_1-u_2\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega sgn(u_1-u_2)(u_1-u_2)dx\\ &\le \int_\Omega sgn(u_1-u_2)(u_1-u_2)dx-\lambda\int_\Omega sgn(u_1-u_2)(v_1-v_2)dx\\ &= \int_\Omega sgn(u_1-u_2)((u_1-u_2)-\lambda(v_1-v_2))dx\\ &\le \int_\Omega |(u_1-u_2)-\lambda(v_1-v_2)|dx\\ &= \|(u_1-u_2)-\lambda(v_1-v_2)\|_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

下面证明式 (8). 定义

$$H_\varepsilon(s)=\int_0^s h_\varepsilon(t)dt$$

$$h_\varepsilon(s)=\begin{cases}\frac{2}{\varepsilon}(1-\frac{|s|}{\varepsilon}), & |s|<\varepsilon,\\ 0, & |s|\ge\varepsilon.\end{cases}$$

易见

$$h_\varepsilon(s) \geq 0,\ \ |H_\varepsilon(s)| \leq 1,\ \ \lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon(s) = sgn(s).$$

而当 $\alpha \geq 2$ 时，$(|u|^{\alpha-2}u)$ 关于 u 是单调递增的，故 $sgn(|u_1|^{\alpha-2}u_1 - |u_2|^{\alpha-2}u_2) = sgn(u_1-u_2)$ 和 $H_\varepsilon(|u_1|^{\alpha-2}u_1 - |u_2|^{\alpha-2}u_2)$ 是 $sgn(u_1-u_2)$ 的光滑逼近. 在式 (8) 中用 $H_\varepsilon(|u_1|^{\alpha-2}u_1 - |u_2|^{\alpha-2}u_2)$ 代替 $sgn(u_1-u_2)$, 我们有

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u_1,u_2) &= \int_\Omega H_\varepsilon(|u_1|^{\alpha-2}u_1 - |u_2|^{\alpha-2}u_2)(div(|\nabla(|u_1|^{\alpha-2}u_1)|^{p-2}\nabla(|u_1|^{\alpha-2}u_1)) \\ &\quad -div(|\nabla(|u_2|^{\alpha-2}u_2)|^{p-2}\nabla(|u_2|^{\alpha-2}u_2)))dx \\ &= -\int_\Omega h_\varepsilon(|u_1|^{\alpha-2}u_1 - |u_2|^{\alpha-2}u_2)(|\nabla(|u_1|^{\alpha-2}u_1)|^{p-2}\nabla(|u_1|^{\alpha-2}u_1) \\ &\quad -\nabla(|u_2|^{\alpha-2}u_2)|^{p-2}\nabla(|u_2|^{\alpha-2}u_2))\cdot(\nabla(|u_1|^{\alpha-2}u_1) - \nabla(|u_2|^{\alpha-2}u_2))dx. \end{aligned}$$

而 $(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a-b)$ 在 $p \geq 2$ 时大于等于零，故 $J_\varepsilon(u_1,u_2) \leq 0$. 令 $\varepsilon \to 0$, 取极限即得式 (8). 所以 A_0 是耗散的. 由命题 2.2, 故 A 也是耗散的. □

为了应用压缩半群理论，还要证明对充分小的 $\lambda > 0$, 有

$$\overline{D(A)} \subset R(I-\lambda A).$$

事实上，我们只要证明

$$R(I-\lambda A) = L^1(\Omega), \forall\lambda > 0.$$

为此，又只须证明

$$L^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega) \subset R(I-\lambda A_0), \forall\lambda > 0. \tag{9}$$

这是因为由式 (9) 可推出

$$L^1(\Omega) = \overline{L^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)} \subset \overline{R(I-\lambda A_0)} \subset \overline{R(I-\lambda A)} \subset R(I-\lambda A),$$

所以

$$R(I-\lambda A) = L^1(\Omega).$$

而证明式 (9), 就是证明：对任意的 $\lambda > 0$ 和 $v \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, 算子方程

$$u - \lambda A_0 u = v$$

有解，即存在函数 $u \in D(A_0)$, 使得 $u - \lambda A_0 u = v$.

命题 3.2 对任意 $\lambda > 0$ 和 $v \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, 存在唯一的函数 $u \in D(A_0)$, 使得 $u - \lambda A_0 u = v$, 且

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|v\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u\|_{L^1(\Omega)} \le \|v\|_{L^1(\Omega)}. \tag{10}$$

证明 设 $v_n \in C_0^\infty(\Omega), \|v_n\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, 且 v_n 在 $L^1(\Omega)$ 中收敛于 v. 考虑正则化问题

$$u_n - \lambda div((|\nabla((u_n^2 + \frac{1}{n})^{\frac{\alpha-2}{2}} u_n)|^2 + \frac{1}{n})^{\frac{p-2}{2}} \nabla((u_n^2 + \frac{1}{n})^{\frac{\alpha-2}{2}} u_n)) = v_n,\ x \in \Omega, \tag{11}$$

$$u_n(x) = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{12}$$

根据椭圆方程的理论，这一问题存在古典解 $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. 以下我们对 u_n 做必要的估计.

首先，由极值原理易见

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|v_n\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|v\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{13}$$

其次，在方程 (11) 两端同乘以 $H_\varepsilon((u_n^2 + \frac{1}{n})^{\frac{\alpha-2}{2}} u_n)$, 并在 Ω 上积分，经分部积分，并利用式 (12), 我们有

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega u_n H_\varepsilon((u_n^2 + \frac{1}{n})^{\frac{\alpha-2}{2}} u_n) dx \\
= \ & \lambda \int_\Omega div((|\nabla((u_n^2 + \frac{1}{n})^{\frac{\alpha-2}{2}} u_n)|^2 + \frac{1}{n})^{\frac{p-2}{2}} \nabla((u_n^2 + \frac{1}{n})^{\frac{\alpha-2}{2}} u_n)) \\
& H_\varepsilon((u_n^2 + \frac{1}{n})^{\frac{\alpha-2}{2}} u_n) dx + \int_\Omega v_n H_\varepsilon((u_n^2 + \frac{1}{n})^{\frac{\alpha-2}{2}} u_n) dx \\
= \ & -\lambda \int_\Omega (|\nabla((u_n^2 + \frac{1}{n})^{\frac{\alpha-2}{2}} u_n)|^2 + \frac{1}{n})^{\frac{p-2}{2}} |\nabla((u_n^2 + \frac{1}{n})^{\frac{\alpha-2}{2}} u_n)|^2 \\
& h_\varepsilon((u_n^2 + \frac{1}{n})^{\frac{\alpha-2}{2}} u_n) dx + \int_\Omega v_n H_\varepsilon((u_n^2 + \frac{1}{n})^{\frac{\alpha-2}{2}} u_n) dx,
\end{aligned}$$